A1. Dany jest ciąg $X_1, X_2, ...$ niezależnych, dodatnich zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz ciąg $a_1, a_2, ...$ dodatnich liczb rzeczywistych. Dowieść, że jeżeli ciąg

$$Y_n = \max\{a_1X_1,\ a_2X_2, ...,\ a_nX_n\}$$

zbiega według rozkładu, to ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

B1. Dany jest ciąg $\xi_1, \xi_2, ...$ niezależnych, dodatnich zmiennych losowych o tym samym rozkładzie oraz ciąg $b_1, b_2, ...$ dodatnich liczb rzeczywistych. Dowieść, że jeżeli ciąg

$$Z_n = \max\{b_1\xi_1,\ b_2\xi_2, ...,\ b_n\xi_n\}$$

zbiega według rozkładu, to ciąg $(b_n)_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

Rozwiązanie (przy oznaczeniach jak w A1). Niech F_{Y_n} oznacza dystrybuantę zmiennej Y_n, a F - dystrybuantę rozkładu granicznego. Mamy

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(t) = F(t) \qquad \text{dla każdego punktu } t \text{ ciągłości funkcji } F.$$

Ponieważ X_j są dodatnie, to mamy $\mathbb{P}(X_j \leq 0) = 0$, skąd

$$(**) \qquad \lim_{t\downarrow 0} \mathbb{P}(X_j \leq t) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } j.$$

Załóżmy teraz wbrew tezie, że ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ nie jest ograniczony. Wówczas istnieje pewien podciąg $(n_k)_{k\geq 1}$ taki, że $a_{n_k} \to \infty$ gdy $k \to \infty$. Dla dowolnego ustalonego $t > 0$ mamy

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) = \mathbb{P}(\max\{a_1X_1, a_2X_2, \ldots, a_nX_n\} \leq t) &= \mathbb{P}(a_1X_1 \leq t,\ a_2X_2 \leq t, \ldots, a_nX_n \leq t) \\ &\leq \mathbb{P}(a_nX_n \leq t) = \mathbb{P}(X_n \leq t/a_n). \end{aligned}$$

Ale na mocy $(**)$ i definicji podciągu n_k, otrzymujemy $\mathbb{P}(X_{n_k} \leq t/a_{n_k}) \to 0$ gdy $k \to \infty$. W połączeniu z powyższą nierównością, możemy więc napisać

$$\lim_{k\to\infty} F_{Y_{n_k}}(t) = 0 \qquad \text{dla wszystkich } t > 0.$$

Na mocy (*), oznacza to, że $F(t) = 0$ dla wszystkich dodatnich punktów ciągłości F. Stąd F nie może być dystrybuantą: warunek $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$ nie jest spełniony (punkty ciągłości dowolnej dystrybuanty tworzą gęsty podzbiór prostej rzeczywistej). Sprzeczność kończy dowód.

Uwaga: Jak widać, teza zadania zachodzi także *bez* założenia o niezależności zmiennych X_j.

A.2 Dla $n = 1, 2, \ldots$ niech μ_n będzie miarą na $\mathbb{R}$ o funkcji charakterystycznej $\varphi_{\mu_n}(t) = \varphi_n(t) = e^{(e^{it}-1)\sqrt{n}}$. Czy rodzina miar $\{\mu_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ jest ciasna?

B.2 Dla $n = 1, 2, \ldots$ niech μ_n będzie miarą na $\mathbb{R}$ o funkcji charakterystycznej $\varphi_{\mu_n}(t) = \varphi_n(t) = e^{(e^{it}-1)\ln n}$. Czy rodzina rozkładów $\{\mu_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ jest ciasna?

Rozwiązanie: Przedstawiamy rozwiązanie Zad. A.2. Zadanie B.2. jest analogiczne, jedyną własnością ciągu parametrów $\sqrt{n}$, z której będziemy korzystać jest nieograniczoność.

Sposób 1 Z wykładu/ćwiczeń wiemy, że rozkład Poissona z parametrem λ ma funkcję charakterystyczną równą $\varphi(t) = e^{(e^{it}-1)\lambda}$. Funkcja charakterystyczna wyznacza rozkład, zatem μ_n to rozkład Poissona z parametrem $\sqrt{n}$. Stąd, $\mu_n(\mathbb{N}) = 1$ oraz dla $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\mu_n(A) = \sum_{k \in A} \frac{(\sqrt{n})^k}{k!} e^{-\sqrt{n}}.$$

Ciasność oznacza, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty K taki że dla dowolnego n, $\mu_n(K) > 1 - \varepsilon$.

Dla dowolnego zbioru zwartego K istnieje $m \in \mathbb{N}$, takie że $K \bigcap \mathbb{N} \subseteq \{0, \ldots, m\}$.

Zauważmy, że

$$\mu_n(K) \leqslant \mu_n(\{0, \ldots, m\}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\sqrt{n})^k}{k!} e^{-\sqrt{n}} \to 0$$

dla $n \to \infty$, gdyż funkcja $e^{\sqrt{n}}$ rośnie szybciej niż dowolny wielomian. W szczególności dla dowolnego zwartego K, istnieje n, takie że $\mu_n(K) < 1/2$, co pokazuje, że rozważana rodzina nie jest ciasna.

Sposób 2 Identyfikując jak sposobie 1 miarę μ_n jako rozkład Poissona z parametrem $\sqrt{n}$ otrzymujemy, że zmienna losowa X_n o rozkładzie μ_n spełnia

$$\mathbb{E}X_n = \mathrm{Var}(X_n) = \sqrt{n}.$$

Z nierówności Czebyszewa dostajemy zatem

$$\begin{aligned} \mu_n((-\infty, \sqrt{n}/2]) &= \mathbb{P}(X_n \leqslant \sqrt{n}/2) = \mathbb{P}(X_n - \mathbb{E}X_n \leqslant -\sqrt{n}/2) \\ &\leqslant \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| \geqslant \sqrt{n}/2) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{(\sqrt{n}/2)^2} = \frac{\sqrt{n}}{n/4} = \frac{4}{\sqrt{n}} \to 0 \end{aligned}$$

dla $n \to \infty$.

W szczególności dla dowolnego K zwartego (a więc ograniczonego) i dużych n,

$$\mu_n(K) \leqslant \mu_n([0, \sqrt{n}/2]) < 1/2,$$

co pokazuje, że rozważana rodzina nie jest ciasna.

Uwaga: Średnią i wariancję rozkładu można także odczytać z pochodnych funkcji charakterystycznych, nie jest konieczne identyfikowanie μ_n jako rozkładu Poissona.

Sposób 3 Używając notacji jak w sposobie 2, mamy

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant \sqrt{n}) = \mathbb{P}\Big(\frac{X_n - \sqrt{n}}{n^{1/4}} \leqslant 0\Big).$$

Prawa strona, na podstawie znanego zadania (omawianego zazwyczaj na ćwiczeniach przy okazji centralnego twierdzenia granicznego) zbiega do $\Phi(0) = 1/2$ (gdzie Φ to oczywiście dystrybuanta rozkładu $N(0, 1)$). Podobnie jak w sposobie 2, implikuje to brak ciasności.

Sposób 4 Załóżmy, że rozważana rodzina jest ciasna. Z twierdzenia Prochorowa implikuje to, że istnieje ciąg $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, taki że $n_k \to \infty$ oraz μ_{n_k} zbiega do pewnej miary probabilistycznej μ. Zatem

$$\varphi_\mu(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(t) = \lim_{k\to\infty} e^{(e^{it}-1)\sqrt{n_k}}.$$

Zauważmy, że dla $0 < |t| < 2\pi$,

$$|e^{(e^{it}-1)\sqrt{n_k}}| = e^{(\cos(t)-1)\sqrt{n_k}} \to 0$$

gdy $k \to \infty$. Stąd $\varphi_\mu(t) = 0$. Ale $\varphi_\mu(0) = 1$, co jest sprzeczne z ciągłością funkcji charakterystycznej. Zatem rozważana rodzina nie jest ciasna.

A3. Niech $(\xi_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych, jednakowo rozłożonych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2 oraz niech $\tau = \inf\{k \geq 1 : \xi_k < 3\}$. Proszę uzasadnić, że $\tau < \infty$ prawie na pewno, a następnie wyznaczyć funkcje charakterystyczne zmiennych losowych ξ_τ, $\xi_{\tau+1}$.

Rozwiązanie.

(1) Zachodzi (korzystamy kolejno z: ciągłości miary, niezależności zmiennych losowych i jednakowego rozkładu):

$$\mathbb{P}(\tau = \infty) = \mathbb{P}(\forall n \geq 1\ \xi_n \geq 3) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(\forall\, n \leq N\ \xi_n \geq 3) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbb{P}(\xi_1 \geq 3)\right)^N = 0.$$

(2) Mamy, korzystając z twierdzenia Fubiniego (możemy zamienić kolejność całki i sumy bo $\left|\mathrm{e}^{ita}\right| = 1$, zaś $\sum \mathbb{P}(\tau = k) = 1$), a potem z niezależności i jednakowego rozkładu zmiennych ξ_k :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi_\tau}(t) &= \mathbb{E}\mathrm{e}^{it\xi_\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_k}\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_k}\mathbf{1}_{\{\xi_1\geq 3,\ldots,\xi_{k-1}\geq 3,\xi_k<3\}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\mathrm{e}^{it\xi_k}\mathbf{1}_{\{\xi_k<3\}}\right)\cdot \mathbf{1}_{\{\xi_1\geq 3,\ldots,\xi_{k-1}\geq 3\}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\left(\mathrm{e}^{it\xi_k}\mathbf{1}_{\{\xi_k<3\}}\right)\right)\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{\xi_1\geq 3,\ldots,\xi_{k-1}\geq 3\}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_1}\mathbf{1}_{\{\xi_1<3\}}\right)\mathbb{P}(\xi_1 \geq 3, \ldots, \xi_{k-1} \geq 3) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_1}\mathbf{1}_{\{\xi_1>3\}}\right)\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_1 \geq 3)^{k-1} \\
&= \frac{1}{1-\mathbb{P}(\xi_i \geq 3)}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_1}\mathbf{1}_{\{\xi_1<3\}}\right) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-3\cdot 2}}\int_0^3 \mathrm{e}^{itx}\cdot 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-6}}\frac{2(1-\mathrm{e}^{3it-6})}{(2-it)}
\end{aligned}$$

(3) Analogicznie (prościej):

$$\begin{aligned}
\varphi_{\xi_{\tau+1}}(t) &= \mathbb{E}\mathrm{e}^{it\xi_{\tau+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_{k+1}}\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_{k+1}}\mathbf{1}_{\{\xi_1\geq 3,\ldots,\xi_{k-1}\geq 3,\xi_k<3\}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{it\xi_{k+1}}\right)\mathbb{P}\left(\xi_1 \geq 3, \ldots, \xi_{k-1} \geq 3, \xi_k < 3\right) \\
&= \mathbb{E}\mathrm{e}^{it\xi_1}\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{it\xi_1} = \frac{2}{2-it}.
\end{aligned}$$

B4. Dla $n = 1, 2, \ldots$ zmienna losowa X_n ma rozkład: $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2n}$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$; zmienne X_n są niezależne. Przyjmujemy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Proszę zbadać, czy ciąg zmiennych losowych

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\ln n}}$$

jest zbieżny według rozkładu, a w przypadku odpowiedzi twierdzącej - wyznaczyć rozkład graniczny.
Uwaga. Mogą przydać się wzory: $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$ *(stała Eulera),* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Rozwiązanie. Chcemy użyć centralnego twierdzenia granicznego. Wobec tego liczymy:

$$\mathbb{E}X_n = \frac{2}{n}, \qquad \mathbb{E}X_n^2 = \frac{5}{n}, \qquad \mathrm{Var}X_n = \frac{5}{n} - \frac{4}{n^2}$$

oraz

$$s_n^2 := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2}.$$

Warto od razu zauważyć, że $\lim_{n\to\infty} s_n^2 = \infty$, jako, że w granicy dostajemy rozbieżny szereg harmoniczny i zbieżny szereg odwrotności kwadratów. Aby móc użyć CTG, sprawdzamy warunek Lindeberga, czyli musimy pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_k - \mathbb{E}X_k\right|^2 1_{\{|X_k - \mathbb{E}X_k| > \varepsilon s_n\}} \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Spójrzmy na indykator. Zauważamy, że $|X_k - \mathbb{E}X_k| \le |X_k| + |\mathbb{E}X_k| \le 3 + 2 = 5$, natomiast jak wcześniej wspomnieliśmy, $s_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Wobec tego, dla ustalonego $\varepsilon > 0$, dla dostatecznie dużych n, warunek z indykatora nie jest spełniony dla żadnego k, czyli sumujemy same zera - zachodzi warunek Lindeberga. Rozpisujemy

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\ln n}} = \frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{s_n} \cdot \frac{s_n}{\sqrt{\ln n}}.$$

Z powyższych rozważań, pierwszy składnik zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(0,1)$, natomiast w przypadku drugiego składnika:

$$\frac{s_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{k} - 5\ln n + 5\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2}}{\ln n}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{k} - 5\ln n}{\ln n} + 5 - \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2}}{\ln n}}.$$

Pierwszy i trzeci składnik sumy spod pierwiastka dążą do 0 - tu możemy powołać się na wskazówkę, czyli całe wyrażenie dąży do $\sqrt{5}$. Ostatecznie, z twierdzenia Słuckiego, dostajemy

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\ln n}} \to \mathcal{N}(0,5) \text{ według rozkładu.}$$

Uwaga: zamiast warunku Lindeberga, można też sprawdzić warunek Lapunowa. Bardzo łatwo liczy się trzeci moment i po odpowiednich rachunkach dostaniemy, że wyrażenie w warunku Lapunowa zachowuje się jak $\frac{1}{\sqrt{\ln n}}$.

Zadanie 5

- Wersja A. Tworzymy zmienne $1_A(X)$, $1_B(X)$, $1_C(X)$ w zależności do którego autobusu wsiądzie Kowalski. Oczywiście

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}, \ \mathbf{P}(X \in B) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}, \ \mathbf{P}(X \in C) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

W zadaniu pytamy o zdarzenie

$$\sum_{i=1}^{92} 1_A(X_i) > \sum_{i=1}^{92} 1_B(X_i) \text{ równoważnie } \sum_{i=1}^{92}(1_A(X_i) - 1_B(X_i)) > 0.$$

Niech $Y_i = 1_A(X_i) - 1_B(X_i)$, zatem

$$\mathbf{E}Y_i = \frac{5}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \ \mathbf{E}Y_i^2 = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Stąd

$$\mathbf{Var}Y_i = \frac{3}{4} - \frac{1}{(12)^2} = \frac{108}{144} - \frac{1}{144} = \frac{107}{144}.$$

Zatem

$$\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{92} Y_i > 0) = \mathbf{P}(\frac{\sum_{i=1}^{92}(Y_i - \mathbf{E}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{92} \mathbf{Var}Y_i}} > \frac{-92\frac{1}{12}}{\sqrt{92\frac{107}{144}}}) \sim \Phi(-\frac{\sqrt{92}}{\sqrt{107}}).$$

- Wersja B. Tworzymy zmienne $1_A(X)$, $1_B(X)$, $1_C(X)$ w zależności do którą karmę wybierze mysz. Oczywiście

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}, \ \mathbf{P}(X \in B) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}, \ \mathbf{P}(X \in C) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}.$$

W zadaniu pytamy o zdarzenie

$$\sum_{i=1}^{84} 1_A(X_i) > \sum_{i=1}^{84} 1_B(X_i) \text{ równoważnie } \sum_{i=1}^{84}(1_A(X_i) - 1_B(X_i)) > 0.$$

Niech $Y_i = 1_A(X_i) - 1_B(X_i)$, zatem

$$\mathbf{E}Y_i = \frac{7}{12} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12}, \ \mathbf{E}Y_i^2 = \frac{7}{12} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Stąd

$$\mathbf{Var}Y_i = \frac{3}{4} - \frac{5^2}{(12)^2} = \frac{108}{144} - \frac{25}{144} = \frac{83}{144}.$$

Zatem

$$\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{84} Y_i > 0) = \mathbf{P}(\frac{\sum_{i=1}^{84}(Y_i - \mathbf{E}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{84} \mathbf{Var}Y_i}} > \frac{-84\frac{1}{12}}{\sqrt{84\frac{83}{144}}}) \sim \Phi(-\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{83}}).$$